TITLE:

Variational Inequality Problems for Monotone Mappings (Mathematics of Decision-making under uncertainty)

AUTHOR(S):

豊田, 昌史

CITATION:

豊田, 昌史. Variational Inequality Problems for Monotone Mappings (Mathematics of Decision-making under uncertainty). 数理解析研究所講究録 2003, 1306: 118-124

ISSUE DATE:

2003-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/42813

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1306 巻 2003 年 118-124

Variational Inequality Problems for Monotone Mappings

東京工業大学 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
豊田 昌史 (Toyoda Masashi)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

不動点理論においてよく知られている縮小写像の不動点定理は, その証明において, 不動点に収束する点列の構成方法をも示している (例えば [6] を見よ). そこでは, 任意の空間の点 x を初期点として, 写像 T による軌道を表す点列 $x, Tx, T^2x, \ldots$ が一意の不動点に収束することが示されている. ところが, 必ずしも縮小でない一般の写像 T においては, この点列が不動点に収束するとは限らない. そのため, 不動点の存在を示す研究とは別に, 不動点へ収束する点列の構成法に関しての研究が進められている. 以下に示す非拡大写像の不動点に関する研究も, そのひとつである.

H を実 Hilbert 空間とし, K を H の閉凸部分集合とする. K 上の写像 T が非拡大であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in K)$$

が成り立つときをいう. T の不動点集合を $\mathrm{F}(T)$ と書くことにする. 非拡大写像の不動点に関して, 存在と点列の構成法に関しての両面で研究が進められている (例えば, [6, 7] 及びその参考文献を見よ). 不動点に収束する点列のひとつとして, つぎの Mann[5] タイプと呼ばれるものが知られている. 本研究においては, この Mann タイプについて扱う.

定理 1 ([2, 8] 参照). *H を実 Hilbert 空間とし, K を H の閉凸部分集合とする. T を K から K への非拡大写像とし $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ とする. $\{x_n\}$ を*

つぎのように構成する.

$$\begin{cases} x_0 = x \in K, \\ x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ここで $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$, $a, b \in (0, 1)$ である. このとき $\{x_n\}$ はある不動点 $z \in \mathrm{F}(T)$ に弱収束する.

不動点と関係の深い問題として, 変分不等式問題がある. 変分不等式問題とは, H の閉凸部分集合 K から H への写像 A に対して, つぎのような解 $u_0 \in K$ を見つける問題のことである.

$$\langle Au_0, v - u_0 \rangle \geq 0 \quad (\forall v \in K).$$

以降, このような u_0 全体のことを $\mathrm{VI}(K, A)$ と書くことにする. 変分不等式問題は, 凸関数の最小化問題の抽象化である. 実際 f を K 上の凸で微分可能な汎関数とするとき,

$$f(u_0) = \min_{v \in K} f(v) \Longleftrightarrow u_0 \in \mathrm{VI}(K, \nabla f)$$

が成り立つ. また, 変分不等式問題は不動点問題の抽象化にもなっている. 実際, T を K からそれ自身への写像とするとき,

$$u_0 \in F(T) \Longleftrightarrow u_0 \in \mathrm{VI}(K, I - T)$$

が成り立つ. ここで I は H 上の恒等写像である. この変分不等式問題と不動点との関係に着目した, つぎのような問題を考えたい.

上で見たように, 非拡大写像の不動点への収束定理のひとつとして定理 1 がある. また, 変分不等式問題は不動点問題の抽象化である. それならば, 変分不等式問題の解への収束定理を構成し, その系として定理 1 を導出する, ということができないだろうか? 本稿では, この問題への取り組みに関して報告する.

2 主結果

まず問題となるのは, どのような性質をみたす写像 A に関する変分不等式問題 $\mathrm{VI}(K, A)$ を扱うか, ということである. それは $A = I - T$ (T は K からそれ自身への非拡大写像) とおくときに満たされる性質でなくて

はならない. そこで, $A=I-T$ が持つ性質について調べてみた. $u,v\in K$ とするとき,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|Au-Av\|^2 &= \frac{1}{2}\|(u-v)-(Tu-Tv)\|^2\\ &= \frac{1}{2}\|u-v\|^2+\frac{1}{2}\|Tu-Tv\|^2-\langle u-v,Tu-Tv\rangle\\ &\leq \|u-v\|^2-\langle u-v,Tu-Tv\rangle\\ &= \langle u-v,Au-Av\rangle.\end{aligned}$$

である. これは $A=I-T$ が $\frac{1}{2}$ を係数にもつ逆強単調写像であることを示す. 実際, A が逆強単調写像であるとは, ある係数 $\alpha>0$ が存在して, 任意の $u,v\in K$ に対して

$$\langle Au-Av,u-v\rangle\geq\alpha\|Au-Av\|^2 \quad (\forall u,v\in K)$$

を満たすことを言う ([3]). このとき更に $\lambda\leq 2\alpha$ ならば, $I-\lambda A$ は K から H への非拡大写像となる. 実際, つぎの計算からそれがわかる.

$$\begin{aligned}\|(I-\lambda A)u-(I-\lambda A)v\|^2 &= \|(u-v)-\lambda(Au-Av)\|^2\\ &= \|u-v\|^2-2\lambda\langle u-v,Au-Av\rangle\\ &\quad +\lambda^2\|Au-Av\|^2\\ &\leq \|u-v\|^2+\lambda(\lambda-2\alpha)\|Au-Av\|^2. \quad (1)\end{aligned}$$

逆強単調写像 A に関する変分不等式問題を考えることで, つぎのような定理 2 を得ることができる. 定理 2 において $A=I-T$ (T は非拡大写像), $\alpha_n=0$ とするとき, 定理 1 が導かれる.

定理 2. H を実 *Hilbert* 空間とし, K を H の閉凸部分集合とする. A を K から H への $\alpha>0$ をその係数としてもつ逆強単調写像とし, $\mathrm{VI}(K,A)\neq\emptyset$ とする. $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases}x_0=x\in K,\\ y_n=P_K(x_n-\lambda_n Ax_n),\\ x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)y_n, \quad n=0,1,2,\dots\end{cases}$$

と構成する. ここで $\{\lambda_n\}\subset[a,b]$, $a,b\in(0,2\alpha)$ でありまた, $\{\alpha_n\}\subset[0,c]$, $c\in(0,1)$ である. このとき $\{x_n\}$ は変分不等式問題のある解 $z\in\mathrm{VI}(K,A)$ に弱収束する.

ここで P_K は H から K への上への距離射影である. 距離射影の定義や性質に関しては, 例えば [6] を見よ. ここでは距離射影の持つ

$$\|P_K x - P_K y\|^2 \le \langle P_K x - P_K y, x - y\rangle \quad (\forall x, y \in K) \tag{2}$$

$$u \in \mathrm{VI}(K, A) \Longleftrightarrow u = P_K(u - \lambda Au) \quad (\forall \lambda > 0) \tag{3}$$

等の性質が, 特に用いられる.

証明. $u \in \mathrm{VI}(K, A)$ とする. $I - \lambda_n A$ は非拡大であることと, (3) より $u = P_K(u - \lambda_n Au)$ が成り立つことから,

$$\begin{aligned}
\|y_n - u\| &= \|P_K(x_n - \lambda_n Ax_n) - P_K(u - \lambda_n Au)\| \\
&\le \|(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\| \\
&\le \|x_n - u\|
\end{aligned}$$

を得る. また (1) より

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\|^2 &= \|\alpha_n(x_n - u) + (1 - \alpha_n)(y_n - u)\|^2 \\
&\le \alpha_n\|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n)\|y_n - u\|^2 \\
&\le \alpha_n\|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n)\{\|x_n - u\|^2 \\
&\qquad\qquad + \lambda_n(\lambda_n - 2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2\} \\
&= \|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n)\lambda_n(\lambda_n - 2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2 \\
&\le \|x_n - u\|^2 + (1 - c)a(b - 2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2 \\
&\le \|x_n - u\|^2
\end{aligned}$$

を得る. それゆえ, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u\|$ が存在し, 更に $Ax_n - Au \to 0$ が成

り立つ．また $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界である．(2) より

$$\begin{aligned}
\|y_n - u\|^2 &= \|P_K(x_n - \lambda_n Ax_n) - P_K(u - \lambda_n Au)\|^2 \\
&\leq \langle y_n - u, (x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\|y_n - u\|^2 + \|(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\|^2 \\
&\qquad -\|(y_n - u) - \{(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\}\|^2\Big\} \\
&\leq \frac{1}{2}\Big\{\|y_n - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 \\
&\qquad -\|(y_n - x_n) + \lambda_n(Ax_n - Au)\}\|^2\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\|y_n - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 \\
&\qquad -2\lambda_n\langle y_n - x_n, Ax_n - Au\rangle - \lambda_n^2\|Ax_n - Au\|^2\Big\}
\end{aligned}$$

を得る．よって

$$\|y_n-u\|^2 \leq \|x_n-u\|^2-\|y_n-x_n\|^2-2\lambda_n\langle y_n-x_n, Ax_n-Au\rangle-\lambda_n^2\|Ax_n-Au\|^2$$

を得る．結局

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\|^2 &\leq \alpha_n\|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)\|y_n - u\|^2 \\
&\leq \|x_n - u\|^2 - (1-\alpha_n)\|y_n - x_n\|^2 \\
&\qquad -2\lambda_n(1-\alpha_n)\langle y_n - x_n, Ax_n - Au\rangle \\
&\qquad -\lambda_n^2(1-\alpha_n)\|Ax_n - Au\|^2 \\
&\leq \|x_n - u\|^2 - (1-c)\|y_n - x_n\|^2 \\
&\qquad -2\lambda_n(1-\alpha_n)\langle y_n - x_n, Ax_n - Au\rangle \\
&\qquad -\lambda_n^2(1-\alpha_n)\|Ax_n - Au\|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．また $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - u\|^2$ であり，$Ax_n - Au \to 0$ であるから $y_n - x_n \to 0$ を得る．さらに (1) より

$$\begin{aligned}
0 &\leq a(2\alpha - b)\|Ax_n - Ay_n\|^2 \\
&\leq \lambda_n(2\alpha - \lambda_n)\|Ax_n - Ay_n\|^2 \\
&\leq \|x_n - y_n\|^2 - \|(I - \lambda_n A)x_n - (I - \lambda_n A)y_n\|^2 \\
&\leq \|x_n - y_n\|^2
\end{aligned}$$

であり, これから $Ax_n - Ay_n \to 0$ を得る. $\{x_n\}$ は有界なので, ある部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在して, ある K の元 z に弱収束する. このとき $z \in \mathrm{VI}(K, A)$ である (詳しくは [9] を見よ).

いま $\{x_{n_j}\}$ を $\{x_{n_i}\}$ 以外のある部分列で $x_{n_j} \xrightarrow{\mathrm{w}} z'$ をみたすものとする. このとき, 上と同様に $z' \in \mathrm{VI}(K, A)$ である. $z = z'$ を示す. いま $z \neq z'$ とする. Hilbert 空間は Opial 条件 をみたす (例えば [6] を見よ) ことから,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| &= \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z\| \\
&< \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z'\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - z'\| = \liminf_{j\to\infty} \|x_{n_j} - z'\| \\
&< \liminf_{j\to\infty} \|x_{n_j} - z\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|
\end{aligned}$$

を得る. これは矛盾である. ゆえに $z = z'$ である. よって $x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} z \in \mathrm{VI}(K, A)$ である. □

3 おわりに

今回の研究では, (不動点定理で言うところの) Mann タイプと呼ばれる点列に関して, 変分不等式問題を扱った. 一方近年, 凸関数の最小化問題や変分不等式問題を (不動点定理で言うところの) Baillon タイプの点列で扱う研究がなされつつある [1, 4]. Baillon の定理も非拡大写像を扱っており, 逆強単調写像と関係が深い. 今回の研究を踏まえた上で, 変分不等式問題における Baillon タイプの点列に関して調べてみたいと考えている.

参考文献

[1] Y. I. Alber, *On average convergence of the iterative projection methods*, Taiwanese J. Math. **6** (2002), 323–341.

[2] W. G. Dotson, *On the Mann iterative process*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970) 65–73.

[3] F. Liu and M. Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-valued Anal. **6** (1998), 313–344.

[4] T. L. Magnanti and G. Perakis, *The orthogonality theorem and the strong-f-monotonicity condition for variational inequality algorithms*, SIAM J. Optim. **7** (1997), 248–273.

[5] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[6] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, 2000.

[7] 高橋渉『凸解析と不動点近似』横浜図書, 2000.

[8] W. Takahashi and G.-E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japonica **48** (1998) 1–9.

[9] M. Toyoda, *Studies on nonexpansive mappings and monotone mappings in infinite dimensional spaces*, Doctor Thesis, Tokyo Institute of Technology, 2002.